تئوری الاستیسیته و مکانیک محیطهای پیوسته

@sazavash

مولف :

سیاوش سعیدی

سخن مولف

امیدوارم اینجانب سیاوش سعیدی قدم هرچند کوچکی
در طرز تفکر و نگاه تو به علم عمران و درس بسیار
مهم تئوری الاستیسیته بردارم. ببین خودمونی بهت
بگم اگر میخوای کنکور دکتری شرکت کنی یا در
زمینه‌های مکانیک شکست و ترک و پایداری چیزی
بارت باشه باید تئوری الاستیسیته بلد باشی
پس تمام سعیم رو می کنم که کاری کنم
با شوق و ذوق تمامی مسائلش رو حل کنی.

این جزوه فقط و فقط مخصوص
دانشجویان کلاس تهیه شده
لطفا نشر و پخش نکنین
حلال و درست نیست
و بنده راضی نیستم.

سیاوش سعیدی

۱-پیش‌نیاز ریاضی (نگارش اندیسی)

ρ = چگالی (عدد)

تغییرمکان (بردار) $= ue_1 + ve_2 + we_3$

تنش (ماتریسی) = $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & \sigma_y & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & \sigma_z \end{bmatrix}$

نگارش شاخصی : مجموعه کاملی از اعداد اجزاء یا مولفه‌ها را با یک نماد واحد دارای زیرنویس نمایش می‌دهند. برای مثال a_i نشان دهنده ۳ عدد .... و .... و .... است. شاخص i معمولا در محدوده ۱ و ۲ و ۳ است. به‌همین صورت a_{ij} بیانگر .... عدد .... می‌باشد.

اندیس آزاد (free): این اندیس در هر جمله‌ی عبارت تانسوری یکبار و فقط یکبار ظاهر می‌شود. اگر یک عبارت شامل m اندیس آزاد باشد، 3^m معادله یا مولفه خواهدداشت. (به اصطلاح مرتبه تانسوری آن 3^m خواهد بود.)

اندیس موهومی (dummy): این اندیس در هرجمله از عبارت‌تانسوری دوبار و فقط دوبار تکرار می‌شوند. تکرار آن‌ها به این معناست که باید بر روی آن‌ها عملگر $\sum$(جمع) اعمال شود. به طورمثل داریم:

$$a_{ii} =$$

$$a_{ij}b_j =$$

۱-پیش‌نیاز ریاضی (نگارش اندیسی)

اندیس موهومی را می‌توان با هراندیس دیگری جایگزین نمودبه شرطی که با اندیس آزاد یکسان نباشد.

$$a_{ij}b_j = a_{ik}b_k = a_{is}b_s$$

تعداد اندیس‌های آزاد یک عبارت مرتبه آنرا مشخص می‌کنند.

گفته می‌شود نماد $a_{ij\ldots m\ldots n\ldots k}$ نسبت به زوج شاخص‌های mn متقارن است اگر :

$$a_{ij\ldots m\ldots n\ldots k} = a_{ij\ldots n\ldots m\ldots k}$$

و پادمتقارن خواهد بود اگر :

$$a_{ij\ldots m\ldots n\ldots k} = -a_{ij\ldots n\ldots m\ldots k}$$

بنابراین نماد دلخواه a_{ij} را می‌توان به‌صورت جمع بخش‌های متقارن و پادمتقارن نوشت:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = a_{(ij)} + a_{[ij]}$$

۱-پیش‌نیاز ریاضی (نگارش اندیسی)

عملیات ریاضی تانسورها

جمع و تفریق :

ضرب اسکالر در تانسور:

ضرب دو نماد با اندیس متفاوت :

۱-پیش‌نیاز ریاضی

مثال ۱-۱ (آسان) ماتریس a_{ij} و بردار b_i بصورت زیر مشخص شده اند، کمیت‌های خواسته شده را تعیین کنید

$$a_{ij}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad b_i=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 0\end{bmatrix}$$

a_{ii}

$a_{ij}a_{ij}$

$a_{ij}a_{jk}$

$a_{ij}b_j$

b_ib_i

b_ib_j

۱-پیش‌نیاز ریاضی (تانسورهای پرکاربرد)

دلتای کرونکر : دلتای کرونکر δ_{ij} (نماد جایگشت) : یـک تانسـور متقـارن مرتبـه .... دارای ۹ مولفه است. $(\delta_{ij} = \delta_{ji})$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

بعضی از خواص دلتای کرونکر :

δ_{ij}

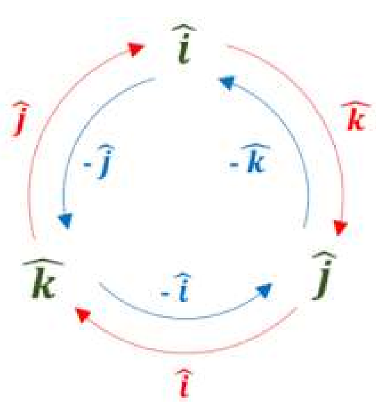
δ_{ii}

$\delta_{ij}a_j$

$\delta_{ij}a_{jk}$

$\delta_{ij}a_{ij}$

تانسور چرخش: ε_{ijk} (نماد تناوب) : یک‌تانسور پادمتقارن مرتبه .... دارای ۲۷ مولفه می‌باشد و صرفا ۶ مولفه آن غیرصفر است.



$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

بقیه ۲۱ مولفه همگی . . . . هستند.

۱-پیش‌نیاز ریاضی (تانسورهای پرکاربرد)

این‌خواص می‌تواند در بسیاری از مسائل (به‌طور مثال دترمینان‌ها و ضرب خارجی مفید باشند.

اتحاد بین دو تانسور پرکاربرد :

۱-پیش‌نیاز ریاضی

مثال ۱-۲ (آسان) خواص‌زیر را برای دلتای کرونکر اثبات‌کنید.

الف) $\delta_{ij}a_j = a_i$

ب) $\delta_{ij}a_{jk} = a_{ik}$

۱-پیش‌نیاز ریاضی

مثال ۱-۳ (آسان) ماتریس‌های زیر داده شده‌است.

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad a_i = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$s_{ij}s_{ij}$

$s_{ji}s_{ji}$

$s_{jk}s_{kj}$

$s_{mn}a_m\ a_n$

$s_{nm}a_m\ a_n$

۱-پیش‌نیاز ریاضی

مثال ۱-۴ (متوسط) ماتریس‌های زیر داده شده‌است.

$$[a_i] = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \qquad [b_j] = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

اگر . . . . نشان‌دهید . . . . و . . . .

۱-پیش‌نیاز ریاضی (تانسورهای پرکاربرد)